www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

PROBABILITÉS ET

STATISTIQUES MATHÉMATIQUES

(Option biochimie - biologie)

DURÉE : 1 h 30

N.B. — *Les candidats sont priés :*

1° *D'écrire très lisiblement, de soigner la rédaction et la présentation matérielle. Il convient de numéroter les diverses questions en les séparant très nettement,* de respecter les notations de l'énoncé.

2° *De donner les explications nécessaires et suffisantes en faisant figurer sur la copie tous les calculs intermédiaires.*

3° *De donner les résultats encadrés.*

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Un élevage de canards est constitué de n_1 canards de race R_1 et de n_2 canards de race R_2, avec $n_1 > 1$ et $n_2 > 1$; une épidémie d'hépatite ayant atteint l'élevage, on veut étudier l'effet de la maladie en prélevant s canards où

$$1 < s \leqslant n_1 + n_2 - 1$$

On admet que la probabilité qu'un canard de race R_1 (resp. R_2) soit atteint de la maladie est p_1 (resp. p_2); on suppose que $0 < p_1 < 1$ et $0 < p_2 < 1$.

Tournez la page S.V.P.

On ne désire tester que m_1 canards de race R_1 et m_2 canards de race R_2, avec $m_1 + m_2 = s$ et $m_1 \geqslant 1$ et $m_2 \geqslant 1$.

On désigne par X_i (resp. Y_j) la variable aléatoire indicatrice de l'événement : « le $i^{ième}$ canard de race R_1 choisi a la maladie » (resp. « le $j^{ième}$ canard de race R_2 choisi a la maladie »), de sorte que X_i (resp. Y_j) a pour loi la loi de Bernoulli de paramètre p_1 (resp. p_2).

On pose : $Z_1 = \frac{1}{m_1} \sum_{i=1}^{m_1} X_i$ $\quad Z_2 = \frac{1}{m_2} \sum_{j=1}^{m_2} Y_j$ $\quad Z = n_1 Z_1 + n_2 Z_2$.

La variable aléatoire Z pouvant être interprétée comme donnant une estimation du nombre de canards atteints de la maladie, on se propose de chercher m_1 pour que la variance de Z soit minimum.

I

On suppose dans cette partie que les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_{m_1}, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{m_2}$ sont indépendantes

1. *a.* En citant avec précision les théorèmes utilisés, calculer les variances $V(Z_1)$, $V(Z_2)$, $V(Z)$ de Z_1, Z_2, Z.

   b. On pose pour toute la suite du problème : $a = n_1\sqrt{p_1(1-p_1)}$ $\quad b = n_2\sqrt{p_2(1-p_2)}$.

   Expliciter $V(Z)$ en fonction de a, b, s et m_1 uniquement.

2. *a.* Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $]0, s[$ par $f(x) = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{s-x}$.

   b. En déduire que si $\frac{a}{a+b} \cdot s \geqslant 1$, $V(Z)$ admet un minimum pour une valeur m_1' de m_1 que l'on précisera.

3. On considère le cas particulier où : $n_1 = 1\,000$ $\quad n_2 = 500$ $\quad p_1 = 0{,}5$ $\quad p_2 = 0{,}8$ $\quad s = 14$.

   a. Démontrer que $m_1' = 10$.

   b. On étudie alors la variable aléatoire Z correspondant à ces valeurs particulières, c'est-à-dire :

   $$Z = 100 \cdot U_1 + 125 \cdot U_2 \quad \text{avec} \quad U_1 = \sum_{i=1}^{10} X_i \quad \text{et} \quad U_2 = \sum_{j=1}^{4} Y_j.$$

   i. En citant avec précision le théorème utilisé, déterminer la loi de U_1 et la loi de U_2.

   ii. Déterminer l'espérance de Z.

   iii. Expliciter l'événement $(Z > 1\,000)$ à l'aide d'événements du type $(U_2 = k_2) \cap (U_1 \geqslant k_1)$

   (On pourra éventuellement s'aider d'un graphique faisant intervenir en particulier la droite d'équation $\frac{x}{10} + \frac{y}{8} = 1$).

   En déduire une valeur approchée de la probabilité de l'événement $(Z > 1\,000)$.

II

On admet dans cette partie que les variables aléatoires Z_1 et Z_2 sont indépendantes mais que pour $i \neq i'$ le coefficient de corrélation de X_i et $X_{i'}$ est r et que pour $j \neq j'$ le coefficient de corrélation de Y_j et $Y_{j'}$ est r'.

1. Calculer les variances de Z_1, Z_2 et Z, et montrer que si l'on pose $A = a\sqrt{1-r}$ et $B = b\sqrt{1-r'}$

   on a : $$V(Z) = a^2 r + b^2 r' + \frac{A^2}{m_1} + \frac{B^2}{s - m_1}.$$

2. En déduire que si $\frac{A}{A+B} \cdot s \geqslant 1$, $V(Z)$ admet un minimum pour une valeur m_1'' de m_1 que l'on précisera.

3. On suppose que : $n_1 = 1\,000$ $\quad n_2 = 500$ $\quad p_1 = 0{,}5$ $\quad p_2 = 0{,}8$ $\quad s = 14$ $\quad r = \frac{2}{3}$ $\quad r' = \frac{3}{4}$.

   a. Déterminer m_1''.

   b. On considère la variable aléatoire Z pour cette valeur m_1'' de m_1 et donc $m_2 = s - m_1''$.

   i. Calculer l'espérance et la variance de Z.

   ii. Expliciter l'inégalité de Bienaymé-Tchébichev pour Z.

   Peut-on obtenir ainsi un majorant raisonnable de la probabilité de l'événement $(Z > 1\,000)$?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail